УДК 681.5.03

В. А. Буряков, М. А. Щербаков

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В ИЕРАРХИЧЕСКОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ С ПОВТОРНЫМ ВЫПОЛНЕНИЕМ НЕКАЧЕСТВЕННО ВЫПОЛНЕННЫХ РАБОТ

Разработан метод оценки длительности обработки в иерархической системе с повторным выполнением некачественно выполненных работ, реализующий схему обработки с дискретными результатами контроля и сложными циклами, имеющими постоянные вероятности повторения. Данный метод, в отличие от классического метода критического пути, позволяет получать более точные результаты для рассматриваемого класса систем.

Сложные современные автоматизированные системы, как правило, строятся на иерархических принципах. В каждой из подсистем такой системы обработка информации выполняется лицом, принимающим решение (ЛПР), в соответствии с определенной схемой обработки, описывающей последовательность решения информационно-расчетных задач (ИРЗ), в том числе с учетом итеративного характера их решения.

Для решения ИРЗ ЛПР должно ввести необходимые данные, запустить задачу на выполнение, проанализировать полученные результаты. В случае обнаружения ошибки или неточности в расчетах необходимо скорректировать допущенные в исходных данных ошибки и повторить цикл решения.

Основная масса ошибок происходит на операциях, традиционно выполняемых человеком (ввод информации, принятие решений, установление связей между явлениями и т.д.), причем интенсивность их возникновения довольно высока (до 1–5% от общего объема короткого (время составления меньше 45 минут) документа) [1], что оказывает значительное влияние на длительность обработки информации в системе.

Особенностью иерархической системы обработки информации является то, что ошибка в результатах может быть обнаружена на одном из последующих этапов обработки, а выполнение части работ осуществляется в параллельных ветвях, которые для получения согласованного результата объединяются на одном из следующих уровней иерархии.

Оценка длительности обработки с помощью классических методов сетевого планирования и управления PERT (Programm Evaluation and Review Technique) не всегда приводит к требуемому результату, т.к. временные оценки работ, составляющих схему обработки, являются случайными величинами (в том числе из-за случайности возникновения ошибок), а сами работы выполняются в параллельных ветвях.

Метод критического пути для совокупности параллельных работ основывается на выборе наибольшей из длительностей их выполнения:

$$T_i^{par} = \max_{b=1, \ldots, B_i} T_i^b ,$$

где B_i – количество параллельных ветвей на i-м параллельном участке; T_i^b – среднее время выполнения b-й ветви i-го параллельного участка.

Этот метод дает значительно заниженную оценку по сравнению с получаемой с помощью имитационного моделирования. Это в первую очередь происходит из-за возможности возникновения повторной обработки в нескольких ветвях иерархической системы (т.е. вероятность возникновения ошибки хотя бы в одной из параллельных ветвей определяется как сумма вероятности совместных событий), в то время как в методе критического пути рассматривается только каждая из ветвей в отдельности.

Совокупная схема обработки, описывающая последовательность действий как внутри подсистем, так и при взаимодействии между подсистемами иерархической системы, является весьма сложной, что затрудняет прямой расчет параметров длительности обработки.

Аналитический способ оценки параметров, основанный на нахождении многомерного распределения вектора случайных длительностей обработки в параллельных ветвях, редко применяется из-за своей сложности.

Предлагается производить первоначальное упрощение схемы обработки в первую очередь на участках, где отсутствуют параллельные ветви.

Предположим, что в каждой подсистеме обработка информации осуществляется последовательно, т.к. основным элементом подсистемы является ЛПР, выполняющее сложные задания только последовательно (если обработка выполняется параллельно несколькими ЛПР, то их можно представить как отдельные подсистемы).

Кроме того, предполагается, что осуществляется обработка заявок только одного типа без приоритетов, а также не учитывается время, затрачиваемое на ожидание в очередях перед обслуживающими приборами, т.е. входные требования к системе низкие.

Простейшая схема обработки с исправлением ошибок приведена на рисунке 1. Каждый элемент схемы обработки может характеризоваться набором показателей: элементы обработки – длительностью выполнения, вероятностью q_i внесения ошибок; элементы контроля – вероятностью p_i пропуска ошибок и т.д. Для упрощения последующих выкладок предполагается, что длительности контроля и исправления ошибки входят в длительность обработки.

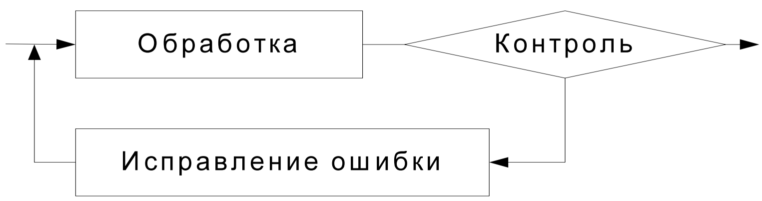

Рис. 1 Простейшая схема обработки данных с исправлением ошибок

Под обработкой понимается процесс решения с участием ЛПР какого-либо информационно-расчетного модуля, имеющего жесткий алгоритм, не допускающий частичного выполнения, поэтому при обнаружении ошибки соответствующий ей этап обработки полностью повторяется.

Тогда имеем схему обработки с постоянными вероятностями разветвления и дискретными результатами контроля. В таких схемах обработки значения вероятностей разветвления (q, $1-q$) не зависят ни от других элементов, ни от пути, по которому развивался технологический процесс до рассматриваемого логического элемента [2].

Процесс обработки единицы входных данных является процессом Бернулли (рис. 2), в котором q – вероятность возникновения ошибки при обработке единичного объема данных, а вероятность правильной обработки единичного объема $p = 1-q$. Процесс контроля также является бернуллиевским, в котором f – вероятность обнаружения ошибки в единичном объеме данных и $e = 1-f$ – вероятность пропуска ошибки. Предполагается, что вероятность принятия правильно обработанного единичного объема данных за ошибку равна нулю. Обнаруженные ошибки исправляются с вероятностью, равной единице.

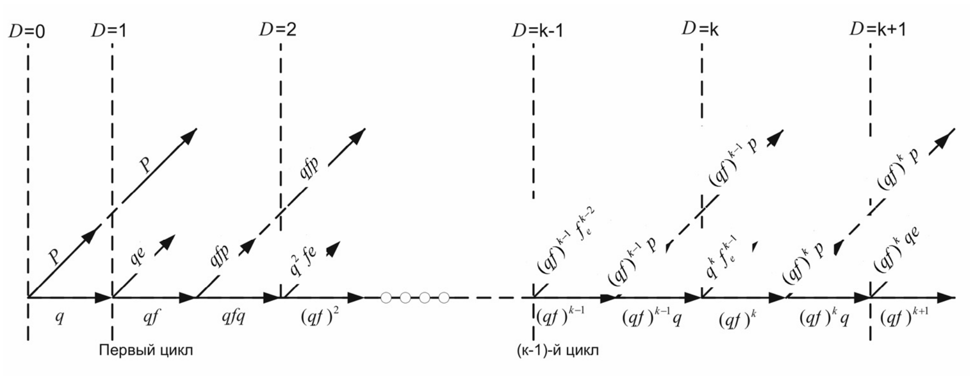

Рис. 2 Процесс функционирования схемы обработки с постоянными вероятностями разветвления и дискретными результатами контроля

Число циклов обработки единицы данных является случайным. Попытка обработки считается успешной, если в фазе обработки не произошло ошибки или же ошибка произошла, но не была обнаружена в фазе контроля. Попытка считается неуспешной, если в фазе обработки произошла ошибка, которая была обнаружена.

Обозначим через ξ число попыток, затрачиваемых на обработку единицы данных. Рассмотрим простейший случай, когда ошибки при обработке возникают независимо. Процесс обработки единицы данных может завершиться успехом на $(k+1)$-й попытке, если с вероятностью $(qf)^k p$ на k-й попытке не произошло ошибок, либо если с вероятностью $(qf)^k q(1-f)$ на k-й попытке не обнаружены ошибки. В противном случае процесс обработки рассматриваемых данных единичного объема не заканчивается, и они должны быть обработаны по крайней мере еще один раз. Вероятность этого события равна $(qf)^{k+1}$ и случайная величина ξ имеет геометрическое распределение, т.е.

$$P(\xi = i) = (qf)^{i-1}(p + qe),\ i \ge 1.$$

Математическое ожидание M и дисперсия D для геометрического закона равны [3]:

$$M = \frac{1}{1-qf},\ D = \frac{qf}{(1-qf)^2}.$$

Схема обработки может включать в себя сложные циклы с постоянными вероятностями повторения (рис. 3). Циклом обработки (i, j) называется множество подэтапов, заключенных между j-й фазой контроля и i-й фазой обработки, к которой направлена обратная связь от j-й фазы контроля. Причиной возникновения циклов может являться, например, необходимость осуществления повторной обработки при возникновении ошибок. Длиной $d(i, j)$ цикла (i, j) называется число подэтапов обработки между j-й фазой контроля и i-й фазой обработки.

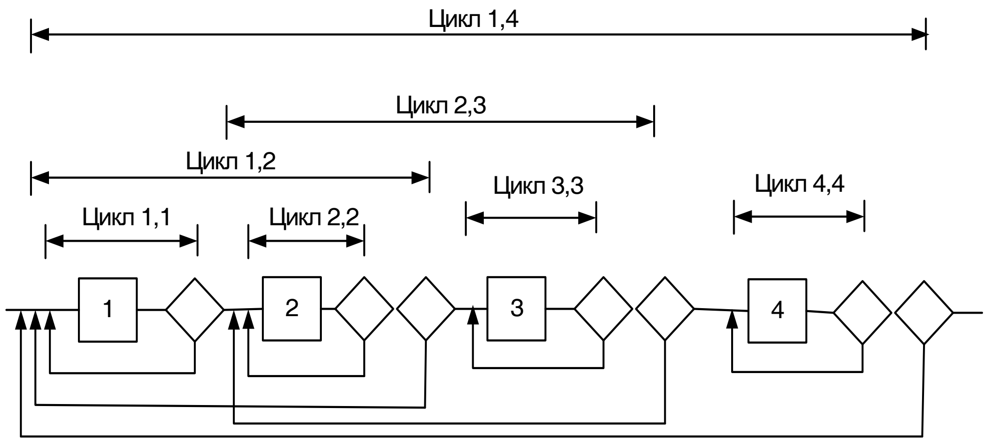

Рис. 3 Пример сложного цикла в схеме обработки

Среднее время $T(i, j)$ обработки единицы данных для сложного цикла (i, j) предлагается определять по следующему алгоритму.

Шаг 1. Определяется перечень циклов и их вложенность, т.е. строится граф вхождений $G(i, j)$ для цикла (i, j). Например, для типичной в иерархических системах схемы обработки, приведенной на рисунке 3, схема вхождений циклов меньшей длины в циклы большей длины соответствует приведенной на рисунке 4.

Шаг 2. $d = 1, T^{(d)}{}_{(k,m)} = 0$.

Шаг 3. Для всех циклов длиной d из графа $G(j,i)$ найти средние временные $T^*(k,m)$ затраты на единицу данных:

$$T^*(k,m) = \left(\sum T_{(k,m)}^{(\prec d)} + \tau_{km} + \theta_{km}\right)/(1 - q_{km} f_{km}) - T_{(k,m)}^{\cap};$$

$$D(k,m) = \sum D_{(k,m)}^{(\prec d)} /(1 - q_{km} f_{km}) + q_{km} f_{km} /(1 - q_{km} f_{km})^2,$$

где $T_{(k,m)}^{(\prec d)}$ – средние временные затраты на единицу данных для цикла, непосредственно входящего в цикл (k, m) в графе вхождений, с длиной, меньшей $d(k, m)$; $D_{(k,m)}^{(\prec d)}$ – дисперсия для цикла, непосредственно входящего в цикл (k, m) в графе вхождений, с длиной, меньшей $d(k, m)$; $T_{(k,m)}^{\cap}$ – средние временные затраты на единицу данных для подциклов, непосредственно входящих в подциклы, составляющие цикл (k, m), *n* раз, $n > 1$ (например, на рисунке 3 подцикл (2,2) входит в подциклы (1,2) и (2,3), составляющие цикл (1,4)); τ_{km} – время, затрачиваемое в фазе обработки на единицу данных; q_{km} – вероятность ошибки в единице данных на выходе фазы обработки; θ_{km} – время, затрачиваемое в фазе контроля для обнаружения и согласования ошибки в единице данных; f_{km} – вероятность обнаружения ошибки в единице данных.

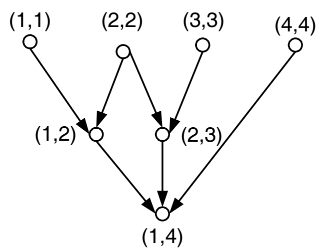

Рис. 4 Граф вхождений циклов меньшей длины в циклы большей длины

Шаг 4. $d = d + 1$; если $d \le d(i, j)$, то идти к шагу 3, иначе $T^*(k,m)$ и есть искомое $T(j,i)$.

В отличие от известных [2], данный алгоритм обеспечивает расчет параметров пересекающихся циклов (подциклы (1,2) и (2,3) на рисунке 3).

С помощью вышеприведенного алгоритма сложный цикл может быть представлен одним участком, эквивалентным циклу по математическому ожиданию и дисперсии длительности выполнения.

Общая длительность (математическое ожидание) обработки в *i*-й подсистеме будет являться суммой длительностей полученных эквивалентных $T_b^{\text{эквив}}$ и последовательных участков $T_{\text{a}}^{\text{послед}}$:

$$T_i^{\text{схемы}} = \sum_a T_a^{\text{послед}} + \sum_b T_b^{\text{эквив}},$$

а дисперсия соответственно:

$$D_i^{\text{схемы}} = \sum_a D_a^{\text{послед}} + \sum_b D_b^{\text{эквив}}.$$

Для расчета параметров упрощенной схемы обработки в иерархической системе предлагается использовать метод GERT (Graphical Evaluation and Review Technique), используемый для расчета параметров стохастических сетей [4].

Стохастическая сеть (и соответствующая ей схема обработки) может быть представлена в виде конечного ориентированного графа $G(\Omega, A)$, состоящего из множества событий Ω и дуг (i, j) (события i и $j \in \Omega$), определяемых матрицей смежности $A = \{p_{ij}\}$, где $0 \le p_{ij} \le 1$, p_{ij} – вероятность того, что операция (i, j) будет выполнена при условии, что операция i выполнена. Каждой дуге присваиваются параметры длительности обработки, значения которых могут быть получены в соответствии с приведенным выше способом оценки параметров фрагмента обработки, содержащего циклы.

Пусть время выполнения операции (i, j) есть случайная величина Y_{ij}, а f_{ij} – условная вероятность или плотность распределения времени выполнения операции (i, j). Условная производящая функция моментов случайной величины Y_{ij} определяется как $M_{ij}(s) = \int e^{sy_{ij}} f(y_{ij}) dy_{ij}$ – для непрерывной случайной величины, $M_{ij}(s) = \sum e^{sy_{ij}} f(y_{ij})$ – для дискретной случайной величины.

В частности $M_{ij}(s) = E[e^{sa}] = e^{sa}$ при $y_{ij} = a = \text{const}$. В таблице 1 описаны некоторые наиболее важные функции распределения и указаны соответствующие производящие функции моментов и первые (математические ожидания) и вторые моменты относительно начала координат [4].

Для случайной величины Y_{ij} определяется W-функция: $W_{ij}(s) = p_{ij} M_{ij}(s)$, которая полностью характеризует операцию (i, j) и соответствует коэффициенту пропускания соответствующей ей дуги.

Петлей считается связная последовательность ориентированных ветвей, каждый узел которых является общим ровно для двух ветвей. Петлю обычно называют петлей первого порядка, чтобы указать на то, что она не содержит других петель и что каждый узел можно достичь из любого другого узла. Петля порядка n: множество n не связанных между собой петель первого порядка.

Эквивалентный коэффициент пропускания для петли порядка n равен произведению коэффициентов пропускания n не связанных между собой петель первого порядка, т.е. $T(L_n) = \prod_{k=1}^{n} T_k$.

Топологическое уравнение для замкнутых графов, известное как правило Мэйсона, имеет следующий вид:

$$H = 1 - \sum T(L_1) + \sum T(L_2) + \ldots + (-1)^m \sum T(L_m) + \ldots = 0,$$

где $T(L_i)$ – сумма эквивалентных коэффициентов пропускания для всех возможных петель i-го порядка.

Таблица 1

Моменты и производящие функции моментов

Тип распределения	$M_E = (s)$	Математическое ожидание	Второй момент
Биномиальное (B)	$(pe^s + 1 - p)^n$	np	$np(np + 1 - p)$
Дискретное (D)	$\dfrac{p_1 e^{sT_1} + p_1 e^{sT_2} + \ldots}{p_1 + p_2 + \ldots}$	$\dfrac{p_1 T_1 + p_1 T_2 + \ldots}{p_1 + p_2 + \ldots}$	$\dfrac{p_1 T_1^2 + p_1 T_2^2 + \ldots}{p_1 + p_2 + \ldots}$
Экспоненциальное (E)	$\left(1 - \dfrac{s}{a}\right)^{-1}$	$\dfrac{1}{a}$	$\dfrac{2}{a^2}$
Гамма (GA)	$\left(1 - \dfrac{s}{a}\right)^{-b}$	$\dfrac{b}{a}$	$\dfrac{b(b+1)}{a^2}$
Геометрическое (GE)	$\dfrac{pe^s}{1 - e^s + pe^s}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{2 - p}{p^2}$
Отрицательное биномиальное (NB)	$\left(\dfrac{p}{1 - e^s + pe^s}\right)^{\prime}$	$\dfrac{r(1 - p)}{p}$	$\dfrac{r(1 - p)(1 + r - rp)}{p^2}$
Нормальное (NO)	$e^{sm + (1/2)s^2\sigma^2}$	m	$m^2 + \sigma^2$
Пуассона (P)	$e^{\lambda(e^s - 1)}$	λ	$\lambda(1 + \lambda)$
Равномерное (U)	$\dfrac{e^{sa} - e^{sb}}{(a - b)s}$	$\dfrac{a + b}{2}$	$\dfrac{a^2 + ab + b^2}{3}$

Для открытой сети необходимо ввести дополнительную дугу с функцией W_A, соединяющую сток с источником. Функция W_A эквивалентна функции для исходной сети: $W_A = 1/W_E$. Затем для модифицированной сети нужно найти все петли (вплоть до максимально возможного порядка) и получить топологическое уравнение сети. Из составленного топологического уравнения находится W_E, на основании которой определяются характеристики сети.

Так как $M_E(s) = 1$ при $s = 0$, то $M_E = W_E(s)/p_E = W_E(s)/W_E(0)$.

Вычисляя j-ю частную производную по s функции $M_E(s)$ и полагая $s = 0$, находим j-й момент μ_{jE} относительно начала координат, т.е.

$$\mu_{jE} = \frac{\delta^j}{\delta s^j} M_E(s)\bigg|_{s=0}.$$

В частности первый момент μ_{1E} – это математическое ожидание времени обработки, а $D = \mu_{2E} - \mu_{1E}^2$ дисперсия длительности обработки.

Для схемы обработки в иерархической системе, изображенной на рисунке 5, где подсистемы одного уровня аналогичны, получено следующее топологическое уравнение:

$$H = 1 - W_{0,0} - \sum_{i}^{3} W_{0,i} W_{i,0} - \sum_{i,j=1}^{i,j\le 3} W_{i,ij} W_{ij,i} - \sum_{i,j=1}^{i,j\le 3} \frac{W_{0,i} W_{i,tj} W_{ij,t}}{W_E} +$$

$$+ \sum_{\substack{i \ne j \\ i,j=1}}^{i,j\le 3} W_{0,i} W_{i,0} W_{j,jk} W_{jk,j} + \sum_{i<k}^{i,j,k,l\le 3} W_{i,ij} W_{ij,i} W_{k,kl} W_{kl,l} -$$

$$- \sum_{\substack{i \ne j \\ j \ne l \\ i \ne l \\ i,j,k,l,m=1}}^{i,j,k,l,m\le 3} W_{0,i} W_{i,0} W_{j,jk} W_{jk,j} W_{l,lm} W_{lm,m} -$$

$$- \sum_{\substack{i<k \\ k<m \\ i,j,k,l,m,n=1}}^{i,j,k,l,m,n\le 3} W_{i,ij} W_{ij,i} W_{k,kl} W_{kl,k} W_{m,mn} W_{mn,m} +$$

$$+ \frac{1}{W_e} \sum_{\substack{i<k \\ i,j,k,l=1}}^{i,j,k,l\le 3} W_{0,i} W_{i,ij} W_{ij,t} W_{k,kl} W_{kl,k} -$$

$$- \frac{1}{W_e} \sum_{\substack{i<k \\ k<m \\ i,j,k,l,m,n=1}}^{i,j,k,l,m,n\le 3} W_{0,i} W_{i,ij} W_{ij,t} W_{k,kl} W_{kl,l} W_{m,mn} W_{mn,m} .$$

Предположим, что вероятность возникновения семантической ошибки $q = 0,05$, а вероятность определения ошибки при проверке $f = 0,8$. Предполагается также, что нагрузка на элементы системы сбалансирована, т.е. коэффициенты загрузки примерно равны за счет того, что время выполнения работ на различных уровнях должно быть примерно одинаково (например, $t = 30$ мин).

Определим значения параметров элементов сети и произведем замену переменных: $W_{0,0} = 0,04 l^{TS} = A$, $W_{0,i} = 0,96 l^{TS} = B$, $W_{i,0} = 0,04 l^{TS} = A$, $W_{i,ij} = 0,96 l^{TS} = B$, $W_{ij,i} = 0,05 l^{TS} = C$, $W_{ij,t} = 0,05 l^{TS} = D$, $t = 30$.

В результате упрощений получено следующее выражение:

$$H = 1 - A - 3AB - 9BC - \frac{9B^2 D}{W_E} + 27B^3 CD + 18B^2 AC +$$

$$+ 27B^2 C^2 - 27B^3 AC^2 - 27B^3 C^3 - \frac{27B^4 DC^2}{W_E},$$

откуда

$$W_E = \frac{9B^2D - 27B^3CD + 27B^4DC^2}{1 - A - 3AB - 9BC + 27B^3CD + 18B^2AC + 27B^2C^2 - 27B^3AC^2 - 27B^3C^3}.$$

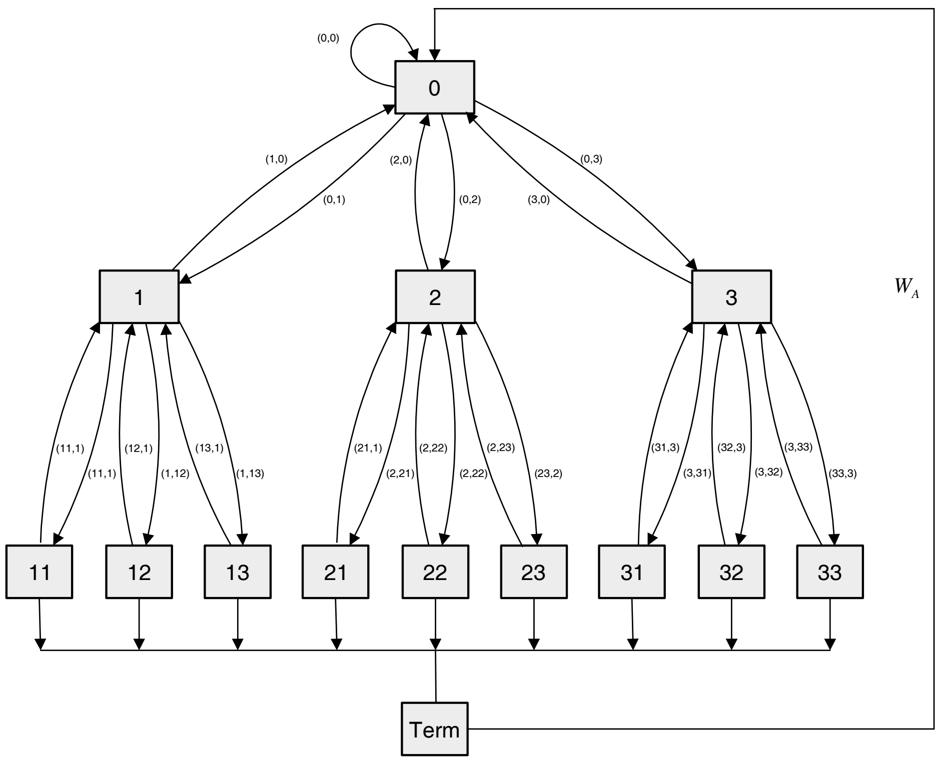

Рис. 5 Стохастическая сеть, описывающая обработку в иерархической системе

Математическое ожидание $T_{hier}^{\text{ож}}$ и среднеквадратическое отклонение σ_{hier} длительности обработки вычисляются аналитическим способом по формулам:

$$T_{hier}^{\text{ож}} = \left.\frac{\delta W_E(s)}{\delta s W_E(0)}\right|_{s=0} = 120,34 \text{ мин},$$

$$\sigma_{hier} = \sqrt{D_{hier}} = \sqrt{\left.\frac{\delta^2 M_E(s)}{\delta s^2 M_E(0)}\right|_{s=0}} = 48,58 \text{ мин}.$$

Для подтверждения результатов, полученных аналитическим путем, разработана имитационная модель на языке GPSS. В результате имитационного моделирования для данной иерархической системы получены $T_{hier}^{\text{имит}} = 121,81$ мин и $\sigma_{hier}^{\text{имит}} = 42,4$ мин.

Кроме того, часто необходимо определять гарантированное время выполнения всего объема работ в данных условиях с вероятностью $P_{\text{г}}$.

Так как схема обработки всей системы состоит из большого числа элементарных этапов обработки, то можно предположить, что общее время T обработки в иерархической системе распределено по нормальному закону:

$$P_{\text{реш}}\left(T\right) \approx \Phi^{*}\left(\frac{T - T_{hier}^{\text{ож}}}{\sqrt{D_{hier}}}\right) = \frac{1}{\sigma_{hier}\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{T} e^{-0{,}5\left(\frac{t - T_{hier}^{\text{ож}}}{\sigma_{hier}}\right)} dt,$$

где Φ^{*} – интеграл вероятностей (функция Лапласа).

Гарантированная продолжительность обработки $T^{\text{г}}$ рассчитывается по формуле

$$T^{\text{г}} = T_{hier}^{\text{ож}} + k\left(P_{\text{г}}\right)\sigma_{hier},$$

где k – коэффициент доверия, для нормального распределения

$$k(P_{\text{г}}) = \Phi^{-1}\left(\frac{P_{\text{г}} + 1}{2}\right),$$

$P_{\text{г}}$ – гарантированная вероятность своевременного выполнения обработки; Φ^{-1} – обратная функция нормального распределения вероятности.

Таким образом, разработан аналитический метод оценки параметров длительности обработки в иерархической системе, учитывающий параллельность обработки, случайную длительность отдельных работ, наличие сложных циклов с постоянными вероятностями повторения.

Использование данного метода позволяет на ранних стадиях разработки сложных автоматизированных систем более точно, по сравнению с методами сетевого планирования и управления, оценивать достигаемые параметры длительности обработки.

Список литературы

1. **Костогрызов, А. И.** Основы оценки, обеспечения и повышения качества выходной информации в АСУ организационного типа / А. И. Костогрызов, А. В. Петухов, А. М. Щербина. – М. : Вооружение. Политика. Конверсия, 1994. – 279 с.
2. **Мамиконов, А. Г.** Достоверность, защита и резервирование информации в АСУ / А. Г. Мамиконов, В. В. Кульба, А. Б. Шелков. – М. : Энергоатомиздат, 1986. – 304 с.
3. **Краснов, М. Л.** Вся высшая математика / М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, В. И. Заляпин. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 5 т. – 296 с.
4. **Филлипс, Д.** Методы анализа сетей / Д. Филлипс, А. Гарсиа-Диас ; пер. с англ. – М. : Мир, 1984. – 496 с.